

BRANDSCHUTZ - FORSCHUNG

DER BUNDESLÄNDER

BERICHTE

Zum Abbrandverhalten von Feststoffen bei Bränden
– Versuche und Modellrechnung –

Teil II: Modellrechnung

52

ARBEITSGEMEINSCHAFT DER INNENMINISTERIEN DER BUNDESLÄNDER
ARBEITSKREIS V – UNTERAUSSCHUSS "FEUERWEHRANGELEGENHEITEN"

Arbeitsgemeinschaft der Innenministerien der Bundesländer
Arbeitskreis V - Unterausschuß "Feuerwehrangelegenheiten"

Forschungsbericht Nr. 52

Zum Abbrandverhalten von Feststoffen bei Bränden
- Versuche und Modellrechnung -
Teil II: Modellrechnung

von
Dipl.-Ing. Dieter Brein

Forschungsstelle für Brandschutztechnik
an der Universität Karlsruhe (TH)

Karlsruhe
Februar 1984

FA.Nr. 85(4/79)

INHALTSVERZEICHNIS

Seite

1.	EINLEITUNG UND ZIELSETZUNG	1
2.	MODELL	4
2.1	Begründung des Rohrmodells	4
2.2	Vorgänge im Feststoff	5
2.3	Vorgänge in der Gasströmung	9
2.4	Kopplung	11
3.	NUMERISCHES VERFAHREN	12
3.1	Lösung der Wärmeleitungsgleichung	13
3.2	Strömung, Temperatur und Konzentration in der Gasphase	14
4.	RECHENERGEBNISSE	15
5.	ZUSAMMENFASSUNG	18
6.	FORMELZEICHEN	20
7.	LITERATURVERZEICHNIS	22
8.	BILDER	24
9.	ANHANG	27

Die numerische Lösung der Fourier'schen
Wärmeleitungsgleichung (2-dimensional)
in kartesischen und Zylinderkoordinaten
mit einem impliziten Differenzenverfahren

1.	Physikalische Grundlagen	27
1.1	Instationäre Wärmeleitung	27
1.2	Wärmequelle bzw. -senke und Massenverlust	28
1.3	Anfangs- und Randbedingungen	29
1.3.1	Anfangsbedingungen	29
1.3.2	Randbedingungen	29
1.3.2.1	Temperaturvorgabe	29
1.3.2.2	Vorgabe eines Wärmestroms	29
1.3.2.3	Vorgabe einer Wärmeübergangszahl	30
2.	Diskretisierung der Differentialgleichung	30
2.1	Prinzip der Differenzenmethode	31
2.2	Überführung der Differentialquotienten in Differenzenform	31

2.3	Bestimmung des Massenverlustes	34
2.4	Anfangs- und Randbedingungen	35
2.4.1	Anfangsbedingungen	35
2.4.2	Randbedingungen	35
2.4.2.1	Randbedingung 1.Art	35
2.4.2.2	Randbedingung 2.Art	36
2.4.2.3	Randbedingung 3.Art	36
3.	Lösungsverfahren	36
4.	Bilder	40

1. EINLEITUNG UND ZIELSETZUNG

Die Brandentstehung und Brandausbreitung bei Feststoffen werden von zahlreichen Einflußgrößen wie der stofflichen Zusammensetzung des Brandgutes, der geometrischen Zuordnung der Brandgutoberflächen zueinander und ihrer Lage im Raum, der räumlichen Ausdehnung der Zündquelle und der räumlichen und örtlichen Energiefreisetzung aus der Zündquelle, der Vorgeschichte und den atmosphärischen Umgebungsbedingungen bestimmt. Die Kenntnis der Abhängigkeit der Brandentwicklung von diesen Einflußgrößen ist Voraussetzung für eine realistische Brandrisikenbeurteilung für gelagerte Feststoffe, wobei die Brandentwicklungsphase insbesondere für die Brandfrüherkennung und erste Brandabwehrmaßnahmen von Bedeutung ist. Zur Ermittlung der Abhängigkeit der Brandausbreitung von diesen Einflußgrößen wurden in bisherigen Arbeiten im Modellmaßstab bevorzugt Holzkrippen verwendet.

Unterstellt man das Vorhandensein einer Zündquelle, von der aus die Feststoffoberfläche mit Wärme, im realen Brandfall mit Wärmestrahlung und mit Konvektionswärme aus Flammen oder heißen Brandgasen, beaufschlagt wird, dann sind die Ereignisse bis zur Zündung im zeitlichen Ablauf folgende:

Die Wärmezufuhr von außen verursacht zunächst eine Temperaturerhöhung im Brandgut entsprechend den physikalischen Gesetzen der Wärmeleitung und Wärmespeicherung in Feststoffen. Bei Holz und Holzwerkstoffen, d.h. also bei organischen Stoffen pflanzlichen Ursprungs sowie einigen anderen organischen Stoffen, z.B. Duroplasten, setzen dann unter weiterer Wärmezufuhr von außen in Oberflächennähe Zersetzungsvorgänge ein, deren Kinetik weitestgehend von der stofflichen Zusammensetzung bestimmt wird. Dabei treten die gebildeten Zersetzungsgase überwiegend an der wärmebeaufschlagten Oberfläche aus.

Bei thermoplastischen Stoffen führt die Wärmezufuhr hingegen zunächst zu Schmelzvorgängen an der Oberfläche. Bei weiterer Wärmezufuhr verdampft die Schmelze und die entstehenden Dämpfe vermischen sich mit der Umgebungsatmosphäre.

Bei Vorliegen eines zündfähigen Gas/Luft-Gemischs bzw. Dampf/Luft-Gemischs und ausreichend hoher Zündenergie werden die infolge der Wärmeeinwirkung freiwerdenden Gase oder Dämpfe gezündet. Sofern die Energiefreisetzung in der oberflächennahen Flamme und der Wärmestrom aus der Flamme an die Oberfläche ausreichen, erhält sich die Verbrennung auch bei Wegnahme der ursprünglichen Zündquelle selbst und kann zur Brandausweitung führen.

Für die Geschwindigkeit der Brandausbreitung entlang von Feststoffoberflächen ist es von Einfluß, welche Neigung die Flächen haben, wobei als Grenzfälle horizontale oder vertikale Anordnung der Flächen in Betracht kommen. Bei der horizontalen und der vertikal nach unten gerichteten Brandausbreitung sind besonders die Wärmeübertragung durch Wärmestrahlung aus den Flammen an die noch nicht brennende Oberfläche sowie die Wärmeübertragung durch Wärmeleitung am Flammenfuß von Bedeutung. Bei der vertikal nach oben gerichteten Brandausbreitung sind dagegen für die gesamte Wärmeübertragung aus der Flamme an den Feststoff sowohl die Wärmestrahlung aus der Flamme als auch die konvektive Wärmeübertragung aus der Flamme und der heißen Brandrauchströmung maßgebend. In diesem Fall wird durch den Auftriebseffekt der Vorgang der Brandausbreitung noch beschleunigt.

Es ist bekannt, daß im realen Maßstab bei vertikal nach oben gerichteter Brandausbreitung die Wärmeübertragung durch Strahlung die Wärmeübertragung durch Konvektion überwiegt; im Modellmaßstab

hingegen bei geringer Höhenausdehnung des Probekörpers darf die Wärmeübertragung durch Konvektion nicht vernachlässigt werden, sondern stellt den Hauptanteil der insgesamt übertragenen Wärmemenge dar.

Von weiterem Einfluß auf das Brandgeschehen und daher auch auf die Brandentwicklung ist die Ventilation bei im Raum bzw. bei im Freien brennenden Stapeln (z.B. Modell-Holzkippen) die geometrische Zuordnung der Elemente zueinander, die den Strömungswiderstand für das Zuströmen von Verbrennungsluft bestimmt.

In den vergangenen Jahren wurden an der Forschungsstelle für Brandschutztechnik Versuche durchgeführt, um die Brandausbreitung an Holzkippen im Modellmaßstab zu untersuchen /1/. In /2/ wurde ein Rohrmodell beschrieben, mit dem die vertikal nach oben gerichtete Brandausbreitung in einem einzelnen Kanal in einer Holzkippe rechnerisch simuliert werden sollte. Es wurde dabei zunächst der Fall der vertikal nach oben gerichteten Brandausbreitung dargestellt, weil dabei die rascheste Ausbreitungsgeschwindigkeit auftritt, die damit im Realfall das größte Risiko bedeutet.

Im vorliegenden Bericht wird dargelegt, welche physikalischen Voraussetzungen bei diesem Rohrmodell gemacht wurden und wie die Berechnung der Brandausbreitung damit realisiert werden kann. Der damit verbundene Programmentwicklungsaufwand war jedoch so hoch, daß im Rahmen dieses Forschungsantrages erst eine grobe Anpassung des Modells an die realen Zustände möglich war. Auf einen Vergleich mit Modellversuchen muß deshalb bisher noch verzichtet werden.

2. MODELL

2.1 Begründung des Rohrmodells

Eine Holzkrippe ist ein geometrisch sehr zerklüftetes Gebilde. Durch das kreuzweise Übereinanderlegen von Kanthölzern entsteht dabei eine Haufwerksgeometrie mit scharfen Ecken und Berandungen, deren strömungstechnische Behandlung kompliziert ist. Stellt man sich eine von unten nach oben gerichtete Heißgasströmung in dieser Krippenanordnung vor, dann fällt auf, daß ein Abwechseln des Grenzschichttyps innerhalb eines senkrechten "Kanals" stromab auftritt (stromab = in Strömungsrichtung). Während nämlich an zwei gegenüberliegenden Seiten des Kanals die Strömung an der Wand anliegt, saugt sie an den beiden anderen Seiten Umgebungsluft an; eine Stabdicke weiter stromab wechselt der Grenzschichttyp wieder. Die vorher noch an der Wand anliegende Strömung saugt nun wieder Luft an, wohingegen die Gase der ehemals frei ansaugenden Strömung neu an der Wand anliegen. Diese Unregelmäßigkeiten führen auch bei kleinen Modellen und bei geringen Strömungsgeschwindigkeiten zu Wirbelbildungen und Turbulenzen. Da jedoch der Wärme- und Stoffübergang aus Gasen an feste Oberflächen in hohem Maße von der Strömungsform beeinflußt wird, mußte im Modell turbulente Strömung berücksichtigt werden.

Um die Geometrie zu vereinfachen, wurde für die Rechnung ein senkrecht stehender Kanal mit Rechteckquerschnitt durch ein senkrecht stehendes poröses Rohr ersetzt, das denselben hydraulischen Durchmesser aufweist wie ein Kanal mit quadratischem Querschnitt. Dieses Rohr stellt eine starke Vereinfachung der realen Geometrie dar,

die jedoch notwendig wurde, um die Berechnungen mit vertretbarem Aufwand durchführen zu können.

2.2 Vorgänge im Feststoff

Wie bereits in der Einleitung gezeigt wurde, wird das Brandverhalten und hier insbesondere die Brandausbreitung davon bestimmt, wie schnell von außen zugeführte Wärme in den Stoff eindringen kann, welche Menge an Zersetzungsgasen dabei entsteht und ob diese ausreicht, die Verbrennung bei Entfernen der Zündquelle aufrecht zu erhalten. Ist die freigesetzte Gasmenge zu klein, dann kann sich die Verbrennung nicht selbst erhalten und die Flamme erlischt. Die für das Verlöschen maßgebenden Mechanismen hat Fernandez-Pello /3/ ausführlich behandelt, so auch die Frage des Verlöschens bei der senkrecht nach unten gerichteten Brandausbreitung und der diese bestimmenden Mechanismen. Hierbei spielt allerdings der Strömungszustand ebenfalls eine wesentliche Rolle.

Im folgenden werden die Gleichungen aufgeführt, die die Aufheizung und die Zersetzung beschreiben, wobei gegenüber den sehr verwickelten Zersetzungsmechanismen, die in Wirklichkeit ablaufen, ein stark vereinfachtes Modell verwendet wurde.

Die zeitlich abhängige Wärmeleitung in einem Körper wird durch die folgende Differentialgleichung beschrieben (Fourier-Gleichung):

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} (\lambda \text{ grad } T) \quad (1)$$

Sofern das Problem Rotationssymmetrie aufweist (poröses Rohr), Wärmequellen bzw. -senken W vorhanden (Zersetzung von Holz) sowie die Stoffwerte temperaturabhängig sind, erhält die Fourier-Gleichung (1) folgende Form:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{da}{dt} \left(\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{a}{y} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{W}{\rho c_p} \quad (1a)$$

mit der Temperaturleitfähigkeit $a = \lambda / \rho c_p$. Die Größe W ist positiv bei exothermen und negativ bei endothermen Vorgängen. Der durch die Zersetzung bedingte temperaturabhängige zeitliche Massenverlust wird durch einen Reaktionsansatz nach Arrhenius beschrieben:

$$-\frac{d\dot{m}}{dy} = \frac{d\rho}{dt} = -k_Z (\rho_H - \rho_K) \cdot \exp(-E/RT) \quad (2)$$

Die in Gleichung (1a) eingeführte Wärmetönung W ergibt sich aus:

$$W = Q_Z \cdot \frac{d\rho}{dt} \quad (3)$$

Die Gleichungen (2) und (3) stellen eine sehr starke Vereinfachung für die Kinetik der Vorgänge dar, die bei der Zersetzung des inhomogenen Stoffes Holz ablaufen. Eingehende Untersuchungen vieler Autoren, insbesondere an sehr kleinen Proben, haben gezeigt, wie überaus verwickelt die thermische Zersetzung von Holz ist und daß sie von vielen Einflußfaktoren wie den Abmessungen der Probe, der Geschwindigkeit der Wärmezufuhr, dem Außendruck und dem Trocknungsgrad abhängig ist. Bei der Übertragung solcher Ergebnisse auf das hier vorliegende Problem besteht die prinzipielle Schwierigkeit, die jeweiligen dort vorhandenen Versuchsbedingungen, insbesondere das bei Proben im Milligrammbereich vorliegende und vom Rohrmodell abweichende Temperaturfeld, angemessen zu berücksichtigen. Im vorliegenden Fall wurde also wie auch von anderen Autoren im Bewußtsein einer nur näherungsweise Wiedergabe der realen Verhältnisse ein Arrhenius-Ansatz zur Beschreibung der Kinetik der Holzzerersetzung verwendet.

Die im Innern des Holzes infolge der Temperaturerhöhung durch Wärmeeinleitung entstehenden Zersetzungsgase führen zu einer Druckerhöhung im Innern und zum Strömen der Gase an die Oberfläche. Diesen Vorgang haben u.a. Kansa et.al./4/ eingehend untersucht. Sie berechneten für den eindimensionalen Fall bei Vorgabe von Wärmestrahlung auf die Oberfläche die räumliche Verteilung der Temperatur, der Dichte, des Druckes und der Geschwindigkeit der Zersetzungsgase in Abhängigkeit von der Strahlungsintensität und von der Permeabilität, d.h. dem Diffusionswiderstand. Dabei erhielten sie z.B. für die Strömungsgeschwindigkeit der austretenden Zersetzungsgase Werte in der Größenordnung von 1 cm/s, die während eines Zeitraumes von mehreren Minuten nur eine geringe Änderung erfuhren. Bei den für die Rechnung zugrundegelegten geometrischen Abmessungen von 1 cm Wanddicke bei verschiedenen Höhen (d.h. Gesamtlängen) der Rohre bedeutet dies für die Brandentwicklungsphase, daß die Zeiten für die Diffusionsvorgänge gegenüber der Gesamtdauer des Vorganges außerordentlich gering sind und damit vernachlässigt werden können. Dieselbe Überlegung scheint übrigens nicht nur für die Brandausbreitung im Modellmaßstab gültig zu sein, denn auch bei Proben größerer Abmessungen, gerade auch bezüglich der Dicke, sind die Prozesse, die innerhalb weniger mm unterhalb der Oberfläche und die unmittelbar an der Oberfläche ablaufen, maßgebend. Die Materialdicke hat also nur einen untergeordneten Einfluß, sofern sie deutlich größer als einige mm ist. Bei sehr dünnen Proben gelten wieder andere Gesetzmäßigkeiten, vor allem in Verbindung mit Wärmequellen hoher Energiedichte. Wenn man aber die sehr energiereichen Wärmequellen, die bei manchen Versuchen verwendet wurden und bei denen der durch Diffusionsvorgänge bestimmte Transport von Produkten allein den zeitlichen Ablauf der Zündung bestimmt, außer acht läßt und sich auf realitätsnähere Zündquellen

wie Gasflammen oder heiße Brandgase im Temperaturbereich bis 1500 °C beschränkt, kann der Zeitverzug durch Diffusion der entstehenden Zersetzungsgase aus dem Holzinnern an die Oberfläche vernachlässigt werden. Es wurden weitere Vernachlässigungen getroffen, die im folgenden aufgeführt sind:

- Der konvektive Wärmetransport infolge der durch die Porenstruktur des Holzes strömenden Zersetzungsgase blieb unberücksichtigt.
- Es wurden geometrische Veränderungen der Oberfläche außer acht gelassen, d.h. es wurde die Dickenabnahme, die während der Verbrennung auftritt, nicht berücksichtigt. Der dadurch gemachte Fehler ist in der Brandentwicklungsphase vergleichsweise gering, da zunächst überwiegend Zersetzungsgase austreten, bevor durch heterogene Reaktionen zwischen (Luft-) Sauerstoff und Rest"kohle" an der Oberfläche die Dicke abnimmt. Erst bei der Berechnung des stationären Abbrandes sollte die Dickenabnahme berücksichtigt werden, obwohl eine ganze Reihe von Autoren auch dann noch diesen Effekt vernachlässigt haben. In der vorliegenden Arbeit wird in der Gleichung (2) (Arrhenius-Ansatz für die temperaturabhängige Abnahme der Stoffdichte) durch Gleichsetzen von $-\dot{m}/dy$ mit $d\rho/dt$ bereits impliziert, daß die Dickenabnahme unberücksichtigt bleibt. Wegen

$$-\frac{dM}{dt} = \frac{d(-\rho V)}{dt} = -\frac{Vd\rho}{dt} - \frac{\rho dV}{dt}$$

und der Annahme $\frac{dV}{dt} = 0$ wird $\dot{m} = -y d\rho/dt$ und $\dot{m}/dy = -d\rho/dt$.

- Eine weitere Vernachlässigung in der Energiegleichung betrifft den Wassergehalt bei feuchten Stoffen, d.h. die latente Wärme bei der Wasserverdampfung bleibt unberücksichtigt.
- Vernachlässigt wird außerdem die Abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit des Holzes von der Faserrichtung, da auch die vor-

liegenden Messungen an bezüglich der Faserrichtung in den Holzkrippen unregelmäßig verteilten Stäben vorgenommen wurden. Zusammenfassend zu diesem Abschnitt kann festgehalten werden, daß zur Bestimmung der Brandausbreitung bei Holz nur die instationäre Wärmeleitungsgleichung (1a), mit den Ergänzungen (2) und (3) in 2-dimensionalen Form gelöst werden muß. Die Randbedingungen ergeben sich aus den Überlegungen der folgenden Abschnitte.

2.3 Vorgänge in der Gasströmung

Die Differentialgleichungen, welche den Impuls-, Energie- und Stoffaustausch in der Gasströmung beschreiben (Navier-Stokes-Gleichungen), wurden in /2/ grundsätzlich dargestellt. Es läßt sich zeigen, daß diese Differentialgleichungen alle denselben Grundaufbau haben und damit nach demselben Rechenverfahren gelöst werden können (siehe Abschn. 3.2).

Man erhält die Gleichungen für die jeweiligen Strömungsgrößen durch das Aufstellen von Bilanzen an einem Kontrollvolumen in der Strömung. Für die Änderung des Impulses in x-Richtung (hier der angenommenen Hauptströmungsrichtung), lautet die Kräftebilanz:

Impulsänderung durch Konvektion (I) -
Impulsänderung quer zur Hauptströmungsrichtung durch Reibung (II) -
Druckkraft (IIIa) - Auftriebskraft (IIIb) = 0.

Für den axialsymmetrischen Fall (Rohrströmung) und stationäre Verhältnisse hat die Bilanzgleichung für den Impuls $m \cdot u$, aufgestellt für ein Volumenelement in der Gasströmung, als Differentialgleichung folgende Form:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\Delta \rho}{\rho} g \quad (4)$$

I IIIa II IIIb

Die Annahme quasistationärer Strömung in der Gasphase wird dadurch gerechtfertigt, daß bei dem vorliegenden Problem der Brandentwicklung im Rohr der Zeitmaßstab der in der Gasphase ablaufenden Prozesse wesentlich kürzer ist als im Feststoff, bei dem zeitabhängige Änderungen zu berücksichtigen sind.

In der Gleichung (4) sind die bei Grenzschichtbetrachtungen üblichen Vereinfachungen ($d \gg v$, $d/dy \gg d/dx$) bereits berücksichtigt. In der mathematischen Formulierung der Gleichung (4) entsprechende Differentialgleichungen für die Enthalpie h sowie für die an chemischen Umsetzungen beteiligten Reaktionspartner ergeben zusammen mit der Kontinuitätsgleichung (=Massenerhaltung im Volumenelement)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} (yv) = 0 \quad (5)$$

einen Satz von Differentialgleichungen zur Bestimmung der Variablen des Strömungsfeldes.

Holzkrippen rufen durch das Vorhandensein scharfer Ecken und Be-
randungen Störungen der laminaren Strömung hervor, sodaß
Strömungsturbulenz entsteht, die den Mischungsvorgang quer zur
Hauptströmungsrichtung gegenüber der Diffusion im laminaren Feld
verstärkt. In den vergangenen Jahrzehnten wurde eine ganze Reihe
von Turbulenzmodellen entwickelt, mit denen der turbulente Aus-
tausch berücksichtigt werden kann. Im vorliegenden Fall wurde ein
Turbulenzmodell verwendet, bei dem die turbulenten Austauschgrößen
über einen Mischungswegansatz (nach Prandtl) bestimmt wurden. Ein
Grund dafür ist der, daß bei der Lösung des Systems von Differential-
gleichungen (4) und (5) auf ein vorhandenes Rechenprogramm zurück-
gegriffen werden konnte, bei dem Turbulenz durch den Mischungswegansatz berücksichtigt wird /7,8/.

2.4 Kopplung

Der Wärme- und Stoffaustausch an der Wand führt zu den nachstehend beschriebenen Randbedingungen, über die eine Kopplung zwischen der Gasströmung und dem Feststoff erfolgt. An der Rohrinnenwand lautet die Energiebilanz:

$$Q_z \cdot \dot{m} + \lambda_H \frac{\partial T_H}{\partial y} = \lambda_G \frac{\partial T_G}{\partial y} \quad (6)$$

und die Randbedingung für den Brennstoff (Zersetzungsgase)

$$\dot{m} = - \rho D \frac{\partial c}{\partial y} \quad (7)$$

Aus Gleichung (6) kann man die Wandtemperatur bestimmen, sofern \dot{m} bekannt ist. Den zeitlichen Massenverlust \dot{m} erhält man bei bekannter Temperaturverteilung im Feststoff durch Integration der Gleichung (2) über die Dicke der Rohrwand unter der vereinfachenden Voraussetzung aus Abschnitt 2.2, daß Diffusionsvorgänge im Holz "unendlich" schnell ablaufen. Die Konzentration des brennbaren Anteils aus der Gesamtheit der freigesetzten Zersetzungsgase ist bei Holz davon abhängig, bei welcher Temperatur die Zersetzungsgase gebildet werden. Mit Sicherheit liegt dieser Wert in der Brandentwicklungsphase deutlich unter 100%. Verlässliche Werte hierzu liegen aus der Literatur nicht vor. Die Konzentration und der Heizwert des Zersetzungsgases ist jedoch deshalb von Interesse, weil die durch Reaktion in der Gasphase freigesetzte Wärmemenge sich unmittelbar auf die Aufheizgeschwindigkeit des Feststoffes und damit auf die weitere Gasfreisetzung auswirkt, also die Kinetik wesentlich mitbestimmt. Für die Konzentration und den Heizwert der Zersetzungsgase wurden Schätzwerte verwendet. Der Schätzwert

für den Heizwert der Zersetzungsgase ergibt sich dabei aus dem einfachsten Modell einer Zersetzung von Holz in Kohlenstoff und Formaldehyd (CH_2O). Der Heizwert von Formaldehyd beträgt 17,2 MJ/kg.

3. NUMERISCHES VERFAHREN

Zur Lösung des Problems der Brandentwicklung an Feststoffoberflächen mit nachfolgender Brandausbreitung auf der Basis der in den Abschnitten 2.2 und 2.3 aufgeführten Gleichungen wurden zwei im Grunde getrennte Rechenprogramme verwendet, eines zur Berechnung des instationären Temperaturfeldes des Feststoffes und eines zur Berechnung der quasi-stationären Strömung. Beide Programmteile wurden über die Randbedingungen für Temperatur und Konzentration an der Grenzfläche (Rohrinnenwand), Gleichungen (6) und (7), untereinander verknüpft. Ein grobes Fließschema hierzu ist im Bild 1 angegeben. Das Gesamtprogramm läuft dabei wie folgt ab:

Im Zeitpunkt $t = 0$ s werden die Randtemperaturen und die Anfangsprofile der Geschwindigkeit sowie das Temperaturprofil im Feststoff vom Benutzer festgelegt. Sodann wird die Temperaturentwicklung im Feststoff berechnet. Bei Zündtemperatur an der Oberfläche wird das Strömungsprofil entlang des Rohres berechnet und die Wandtemperatur aufgrund der Randbedingung Gleichung (6) bestimmt. Mit diesen Randwerten erhält man ein neues Temperaturprofil im Feststoff usw.. Die beiden folgenden Abschnitte behandeln die Lösungsverfahren für die beiden Teilprogramme. Das Gesamtprogramm wurde auf einem an der Forschungsstelle für Brandschutztechnik vorhandenen Prozeßrechner PDP 11/23 installiert. Die Programmiersprache ist FORTRAN IV.

3.1 Lösung der Wärmeleitungsgleichung

Zur numerischen Lösung der Wärmeleitungsgleichung in der Form der Gleichung (1a) wurde diese in Differenzenschreibweise überführt. Dies geschieht dadurch, daß man den Rohrwandungsquerschnitt durch ein Netzgitter diskretisiert und die Differentialquotienten an den Gitterpunkten durch Differenzenquotienten approximiert. Diese werden für jeden Gitterpunkt in die Wärmeleitungsgleichung für jeweils eine Zeitschicht eingesetzt. So erhält man schließlich für jede Zeitschicht ein Gleichungssystem, das nach den Temperaturen aufgelöst wird. Aus Gründen einer besseren numerischen Stabilität wurde einem impliziten Lösungsverfahren vor einem expliziten Verfahren der Vorzug gegeben. Die Ansätze für die Gleichungen entsprechen im wesentlichen dem bei Marsal /6/ angegebenen Verfahren von Peaceman und Rachford zur Lösung der zweidimensionalen Wärmeleitungsgleichung mit ADIP (im Englischen: "Alternating Direction Implicit Procedure"). Das System linearer Gleichungen führt auf sog. Tridiagonale Koeffizientenmatrizen, die mit einer Rekursionsformel mit relativ geringem mathematischen Aufwand gelöst werden können, wodurch man die Temperaturwerte an den Gitterpunkten erhält.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, bei Verwendung numerischer Verfahren eine hohe Genauigkeit zu erzielen. Den geringsten Programmieraufwand hat man sicherlich dann, wenn man eine ausreichend hohe Zahl von Gitterpunkten, d.h. ein feinmaschiges Netz vorsieht. Im vorliegenden Fall war allerdings bedingt durch den Umfang des Gesamtprogrammes und bedingt durch die relativ geringe Speicherkapazität des Rechners der verfügbare Speicherplatz für die Temperatur und die Stoffdichte an den Gitterpunkten stark eingeschränkt. Aus diesem Grund wurde in Richtung beider Ortskoordinaten

(parallel und quer zur Hauptströmungsrichtung im Rohr) ein nicht äquidistantes Gitter gewählt, das so ausgelegt ist, daß im Bereich großer Temperaturgradienten enge, im Bereich geringer Temperaturgradienten aber weite Gitterabstände auftreten. Ein nennenswerter Verlust an Genauigkeit ist damit nicht verbunden. Details der mathematischen Formulierung sind dem Anhang zu entnehmen.

3.2 Strömung, Temperatur und Konzentration in der Gasphase

Die Differentialgleichungen zur Beschreibung des Strömungsfeldes stellen einen Satz gekoppelter nichtlinearer parabolischer Differentialgleichungen dar. Eine analytische Lösung des Gleichungssystems ist nicht möglich. Ebenso wie bei der Wärmeleitungsgleichung erfolgt die Lösung nach Umwandlung der Differentialgleichungen in Differenzgleichungen auf numerischem Wege mit Hilfe des obengenannten Rechners.

Zur numerischen Lösung wurde das Patankar-Spalding Verfahren verwendet, das ausführlich in /7/ und /8/ beschrieben ist. Daher wird hier auf eine Darstellung des Verfahrens verzichtet. Das Programm wurde an der Forschungsstelle weiter modifiziert, um die spezifische Rohrgeometrie zu berücksichtigen, und wurde mit dem Programm zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung gekoppelt. Auf der Basis dieser Arbeiten ist es möglich, Modellrechnungen für Brandausbreitungsvorgänge unter Auftriebseinfluß zu berechnen.

4. RECHENERGEBNISSE

In den Bildern 2 bis 4 liegen erste Rechenergebnisse vor, die mit dem im Rahmen dieses Forschungsauftrages erarbeiteten Programm gewonnen wurden. Das Bild 2 zeigt die Querverteilung der in der Gasphase berechneten Strömungsvariablen u , T , c_{O_2} und c_G in einer Höhe des Rohrelementes von 20 mm und $0,2 \text{ s}$ nach erfolgter Zündung. Im Bild 2 sind über dem Abstand von der Symmetrieachse die auf den jeweiligen, am Rand des Diagramms angegebenen Maximalwert der Strömungsgröße bezogenen Werte aufgetragen.

Bedingt durch die getroffenen Grenzschichtannahmen ist die Geschwindigkeit am Rand $=0$ (Haftbedingung an der Wand), die Sauerstoffkonzentration am Rand $=0$ und die Konzentration des Zersetzungsgases weist den Maximalwert von 0,8 auf, da dieses aus Wand in die Strömung austritt. Der Wert 0,8 als Maximalwert für das aus der Wand austretende Zersetzungsgas wurde als Rechengröße mit der Begründung gewählt, daß bei der Zersetzung von Holz ein Anteil nicht reagierender Gase dabei ist. Mangels Verfügbarkeit von Meßwerten hierzu ist der Wert allerdings spekulativ und nur für erste Programmtests verwendet worden. Bei einer weiteren Anpassung des Modells an reale Verhältnisse muß die temperaturabhängige Änderung der Zusammensetzung der in die Strömung austretenden Zersetzungsgase berücksichtigt werden.

Die Temperatur am Rand nimmt einen durch die Randbedingung vorgegebenen Wert an. Zur Symmetrieachse hin steigt die Temperatur, durch wandnahe Reaktion von Zersetzungsgasen mit Luftsauerstoff bedingt, auf einen Maximalwert in der Reaktionszone an, um näher an der Symmetrieachse wieder auf den durch die Anfangsströmung vorgegebenen Temperaturwert abzufallen. In der Nähe des Temperaturmaximums ist ebenfalls das Maximum der Geschwindigkeit zu finden, das durch die Expansion der

strömenden Gase in der Reaktionszone hervorgerufen wird. Dieses fällt dann zur Symmetrieachse hin wieder etwas ab.

Die Gaskonzentrationen von Luftsauerstoff und Zersetzungsgas nehmen an dieser Querschnittsposition in der Strömung die von der Anfangsströmung vorgegebenen Werte an. Dies wird sich weiter stromab ändern, wenn die Reaktionszone breiter wird und der am Anfang zugeführte Luftsauerstoff zunehmend verbraucht wird, sodaß dann die Sauerstoffkonzentration auf der Symmetrieachse fällt und die Zersetzungsgaskonzentration ansteigt. Wegen der bereits genannten rechen-technischen Begrenzung der Geometrie kann dies gegenwärtig noch nicht demonstriert werden.

Die Bilder 3 und 4 geben einen Eindruck von der Temperatur- und Dichteverteilung im Feststoff (Bild 3) und der Temperatur- und Massenstromverteilung am Rand (Bild 4). An beiden Bildern wird deutlich, welchen großen Einfluß die in der Arrheniusgleichung gewählten Konstanten "Häufigkeitsfaktor" und "Aktivierungsenergie" sowie ggf. durchgeführte Einschränkungen oder Begrenzungen des Arrheniusausdruckes auf die Profile der genannten Größen haben.

Im Bild 3 ist der Temperaturverlauf über der Wanddicke des betrachteten Feststoffelementes aufgetragen, und zwar in drei Höhen des Elementes. Es ist daraus ersichtlich, daß kurze Zeit nach erfolgter Zündung in der Gasphase nur die Randtemperatur von der jeweiligen Lage des Querschnittes beeinflusst wird. Weiter innen ist das System zu träge, als daß sich dort bereits Auswirkungen zeigen würden. Diese Feststellung rechtfertigt damit die getroffene Annahme, daß die Gasströmung quasi stationär betrachtet werden kann und der Feststoff instationär gerechnet werden muß. Für die Dichteverteilung gilt qualitativ ebenfalls, daß sich die über der Höhe feststellbaren Änderungen weiter innen nicht bemerkbar machen. Es ist weiter daraus zu

ersehen, daß die Zersetzung im Inneren während der Brandentwicklungsphase keinen nennenswerten Beitrag zu der an der Wand austretenden Gasmenge leisten kann. Dies ist im wesentlichen in der Wahl der Reaktionskonstanten begründet. Im Bild 3 wurden die einzelnen Rechenwerte durch einen Polygonzug verbunden, da das grobe Raster keinen glatten Kurvenzug zuließ.

Im Bild 4 wurden der örtliche Verlauf der Randtemperatur und die Stromdichte der am Rand in die Gasströmung austretenden Masse kurz nach erfolgter Zündung dargestellt. An der Darstellung der Randtemperatur ist zu sehen, daß die Temperatur mit zunehmender Höhe ansteigt. Dies ist darauf zurückzuführen, daß mit zunehmender Höhe eine Enthalpievergrößerung der Strömung durch die Reaktion erfolgt. Die Zunahme des Massenverlustes mit zunehmender Höhe ist über die Temperaturabhängigkeit der Zersetzungsreaktion des Feststoffs direkt mit der am Rand eingeleiteten Wärmezufuhr und damit der Temperaturerhöhung im Inneren des Feststoffes gekoppelt. Allerdings wurde hier absichtlich die Reaktionsgeschwindigkeit bei einer willkürlich gewählten Temperatur begrenzt, sodaß sich ab ca. 15 mm Höhe in diesem Bild ein konstanter Wert des Massenverlustes über der Höhe ergibt.

Diese Ausführungen belegen, daß durch die Wahl der Reaktionskonstanten die zeitliche Entwicklung der Brandausbreitung nahezu beliebig beeinflusst werden kann. Daraus ergibt sich die zwingende Notwendigkeit, sorgfältige Versuche im Modellmaßstab durchzuführen, mit denen die kinetischen Parameter bestimmt werden können. Erst dann kann man sichere Aussagen über die tatsächlich zu erwartende Brandausbreitung aufgrund des hier erarbeiteten Rechenprogramms machen. Eine sinngemäße Bemerkung hat im übrigen ebenfalls für die Gasphase Gültigkeit, wo sich ebenfalls durch die Wahl der kinetischen Konstanten in den Transportgleichungen für die Enthalpie und die Gaskonzentrationen die Reaktion in weitem Maße beeinflussen läßt.

5. ZUSAMMENFASSUNG

Zur Ermittlung der Abhängigkeit der Brandausbreitung von der stofflichen Zusammensetzung, der Geometrie und der Zündquelle bei gelagerten Feststoffen im Modellmaßstab wurden in der Vergangenheit bevorzugt Holzkrippen verwendet. Besonders die Brandentwicklungsphase ist im Realfall für die Brandfrüherkennung und erste Brandabwehrmaßnahmen von Bedeutung. Hierbei gilt das Interesse bevorzugt der vertikalen, durch Auftriebskräfte beschleunigten Brandausbreitung.

In der vorliegenden Arbeit wurde ein physikalisch-mathematisches, vereinfachtes Modell für die Brandausbreitung am Beispiel eines einzelnen senkrechten "Kanals" in einer Holzkrippe dargestellt, der aus Symmetriegründen durch ein poröses Rohr ersetzt wurde. An diesem Modell wurden die Aufheizungsphase durch eine externe, als heiße Brandgasströmung angenommene Zündquelle und die erste Zündung an der inneren Oberfläche mit folgender senkrechter Brandausbreitung simuliert. Dies erforderte eine simultane Lösung der Wärmeleitungsgleichung für die Rohrwand und der Bilanzgleichungen für die Strömungsgrößen Impuls, Enthalpie und Stoffkonzentrationen.

Hierzu wurde ein Rechenprogramm entwickelt, bei dem die Lösung der Wärmeleitungsgleichung für den instationären Fall der Aufheizung des Feststoffes mit Berücksichtigung der im Inneren des Feststoffes ablaufenden Zersetzungsvorgänge durch ein numerisches Verfahren herbeigeführt wurde. Mit diesem Programm wurde über die an der inneren Rohrwand geltenden Randbedingungen für den Austausch von Enthalpie und Masse ein aus der Literatur bekanntes Rechenprogramm zur Lösung der Differentialgleichungen für die obengenannten Strömungsgrößen in der quasistationären Rohrströmung gekoppelt.

In der Arbeit wurden erste Rechenergebnisse in Form von Diagrammen dargestellt, die einen Eindruck von den berechneten Temperatur- und Dichteprofilen in der Rohrwand einerseits und von den Querprofilen der Strömungsgrößen in der Rohrströmung andererseits, kurz nach erfolgter Zündung, vermitteln. Ein direkter Vergleich mit Messungen an Modellen ist noch nicht zulässig, da die getroffenen Annahmen über die Kinetik der Zersetzung im Inneren der Rohrwand, über die Zusammensetzung der Zersetzungsgase in Abhängigkeit von der Temperatur, bei der sie entstehen, und über die damit zusammenhängende Wärmefreisetzung durch Reaktion in der Gasphase den wirklichen Gegebenheiten nur unvollkommen entsprechen.

6. FORMELZEICHEN

A1...6	Koeffizienten der linearen Gleichung (A.9)
A1...4	Koeffizienten der linearen Gleichung (A.21)
B1...4	Koeffizienten der linearen Gleichung (A.21a)
D	Diffusionskoeffizient [m^2/s]
E	Aktivierungsenergie [J/mol]
F	Fläche [m^2]
M	Masse [kg]
Q	Wärmestrom [J/s]
Q_z	Zersetzungswärme [J/g]
R	Gaskonstante [J/mol K]
T	Temperatur [K]
V	Volumen [m^3]
W	Wärmequelle [$\text{J/m}^3 \text{ s}$]
a	Temperaturleitfähigkeit [m^2/s]
a...d	Koeffizienten des tridiagonalen Gleichungssystems (A.19)
c	Gaskonzentration [kg/kg]
c_p	spezifische Wärme [J/m^3]
c_s	Stefan-Boltzmann-Konstante [$\text{J/m}^2 \text{ s K}^4$]
h	Enthalpie [J]
h	Schrittweite in x-Richtung
k	Häufigkeitsfaktor [$1/\text{s}$]
k	Schrittweite in y-Richtung
m	Massenstromdichte [$\text{kg/m}^2 \text{ s}$]
p	Druck [Pa]
q	Wärmestromdichte [$\text{J/m}^2 \text{ s}$]
r	Konstante für linearen zeitlichen Temperaturanstieg [K/s]
t	Zeit [s]
u	Geschwindigkeit in x-Richtung [m/s]
v	Geschwindigkeit in y-Richtung [m/s]
v	Geschwindigkeitskonstante der Zersetzungsreaktion [$1/\text{s}$]
x	Wegkoordinate [m]
y	Wegkoordinate [m]

λ	Wärmeübergangszahl [$\text{J}/\text{m}^2 \text{ s K}$]
μ	Wärmeleitfähigkeit [$\text{J}/\text{m s K}$]
ρ	dynamische Viskosität [$\text{kg}/\text{m s}$]
δ	Dichte [kg/m^3]
σ	Schalter für Geometrie in der Fourier-Gleichung (A-1)
ϕ	Strahlungsaustauschfaktor (geometrie- und emissionsabhängig)

INDICES

G	Gas
H	Holz
K	Kohle
O_2	Sauerstoff
Z	Zersetzung
ab	abgeführt
end	Endzustand
i	Index für gewählte Gaskomponente (c_i)
i	Laufparameter in x-Richtung
j	Laufparameter in y-Richtung
m	Exponent
max	Maximalwert
min	Minimalwert
n	Nummer des Zeitschritts
o	Exponent
str	Wärmestrahlung
w	Zustand an der Wand
zu	zugeführt
∞	Umgebung
0	Anfangswert
1	erste Indexnummer

7. LITERATURVERZEICHNIS

- /1/ Brein, D.,
Schatz, H.: Modellbrandversuche zur Bestimmung
des Brandablaufs von Feststoffbränden.
Forschungsbericht Nr. 27 der Arbeits-
gemeinschaft Feuerschutz (AGF) (1975)
- Brein, D.: Titel wie oben.
Forschungsberichte Nr. 30 (1976) und
38 (1979) der Arbeitsgemeinschaft
Feuerschutz (AGF)
- Brein, D.: Zum Abbrandverhalten von Feststoffen
bei Bränden -Versuche und Modell-
rechnung- Teil I: Versuche.
Forschungsbericht Nr.43 der Arbeits-
gemeinschaft der Innenministerien der
Bundesländer Arbeitskreis V - Unteraus-
schuß Feuerwehrangelegenheiten (1981)
- /2/ Brein, D.: Modellbrandversuche zur Bestimmung des
Brandablaufs von Feststoffbränden.
Forschungsbericht Nr. 34 der Arbeits-
gemeinschaft Feuerschutz (AGF) (1978)
- /3/ Fernandez-Pello, A.C.,
Hirano, T.: Controlling Mechanisms of Flame Spread.
Fire Science and Technology Vol.1
(1982) (S. 17-54)
- /4/ Kansa, E.J.,
Perlee, H.E.,
Chaiken, R.F.: Mathematical Model of Wood Pyrolysis
Including Internal Forced Convection.
Combustion and Flame 29 (1977),
S.311-324

8. BILDER

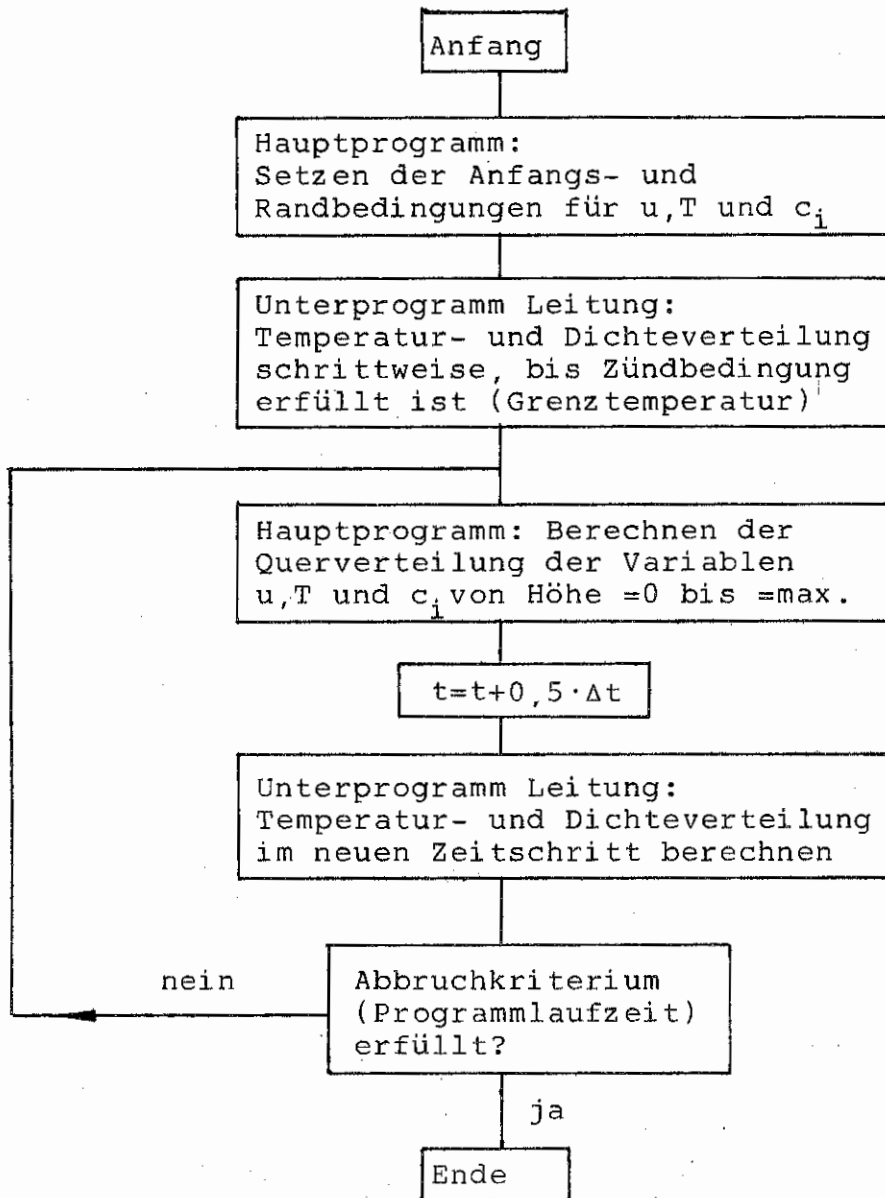


Bild 1 Fließschema des Rechenprogramms.

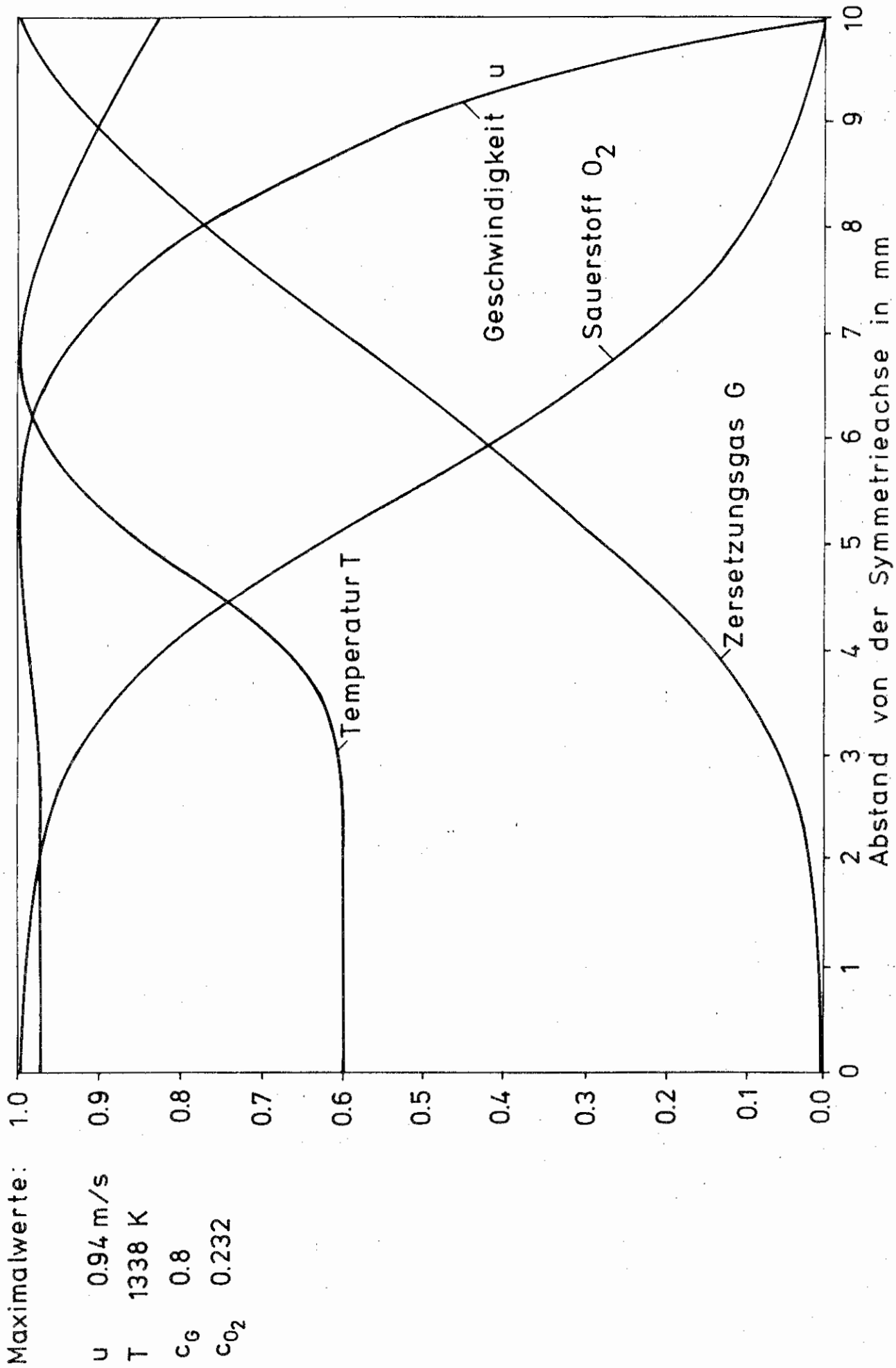


Bild 2 Querverteilung der auf den jeweiligen Maximalwert bezogenen Größen u, T und c_i in 20 mm Höhe und 0,2 Sekunden nach der Zündung in der Gasphase. $u_0 = 0,4$ m/s, $T_0 = 782$ K

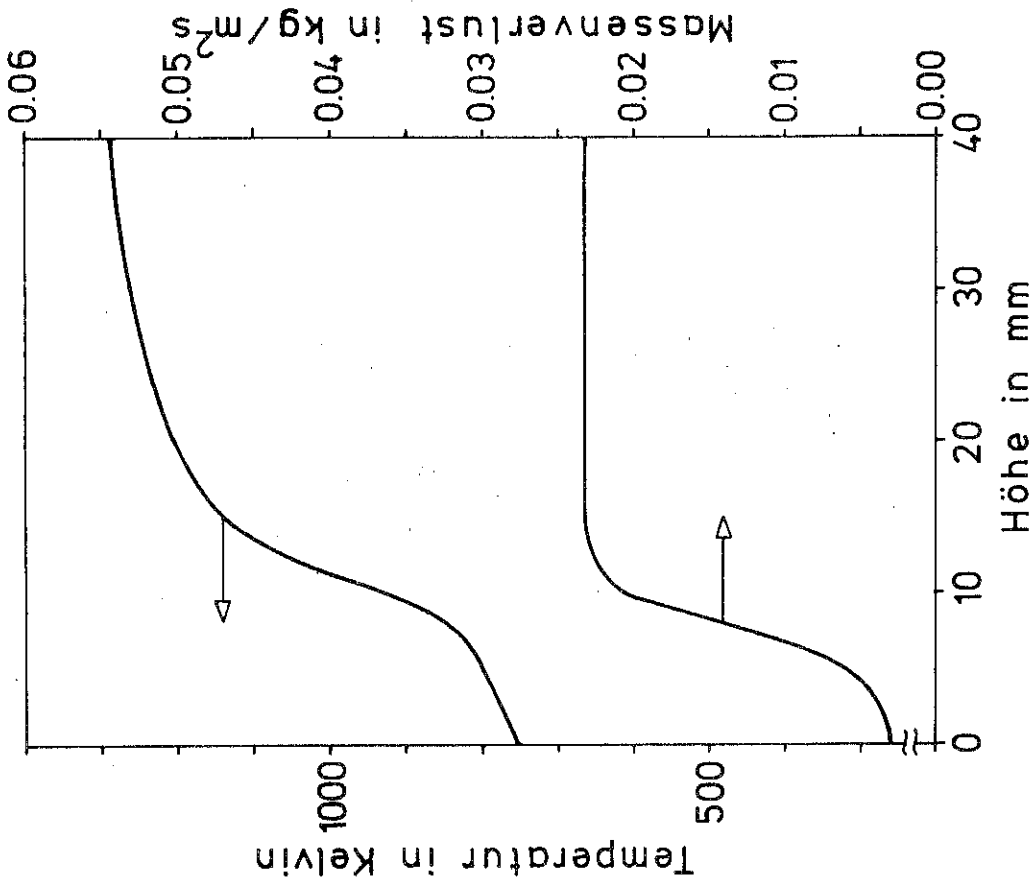


Bild 4 Örtlicher Verlauf der Temperatur und des zeitlichen Massenverlustes, am Rand über der Höhe aufgetragen, 0,2 Sekunden nach der Zündung in der Gasphase.

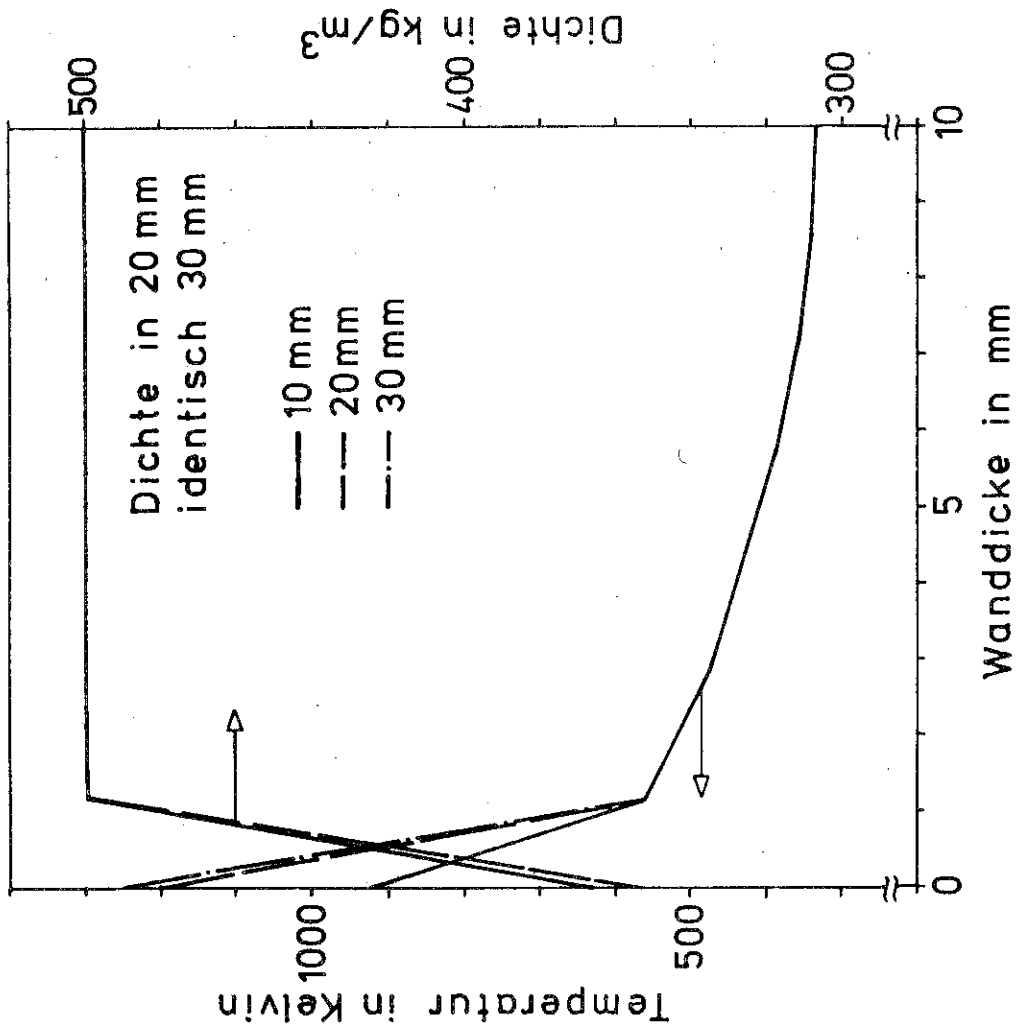


Bild 3 Örtlicher Verlauf der Temperatur und der Dichte in 10 mm, 20 mm und 30 mm Höhe, 0,2 Sekunden nach der Zündung in der Gasphase. Rohr- ϕ 20 mm, Wanddicke 10 mm.

9. ANHANG

Die numerische Lösung der Fourier'schen Wärmeleitungsgleichung (2-dimensional) in kartesischen und Zylinderkoordinaten mit einem impliziten Differenzenverfahren.

1. Physikalische Grundlagen

1.1 Instationäre Wärmeleitung

Die allgemeine partielle Differentialgleichung für den instationären Wärmetransport in Feststoffen (Fourier-Gleichung) lautet:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \sigma \frac{\lambda(T)}{y} \frac{\partial T}{\partial y} + W = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{A.1})$$

Dabei ist $\sigma = 0$ für ebene Probleme (z.B. Wände, Lagerstapel),
 $\sigma = 1$ für Zylindersymmetrie (z.B. Rohrmodell).

Durch Umformung mittels der Produktregel und der Kettenregel der Differentialrechnung erhält man für

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] = \lambda(T) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial T} \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]^2 \quad \text{und entsprechend für}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] = \lambda(T) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial T} \left[\frac{\partial T}{\partial y} \right]^2 .$$

Die bei dem vorliegenden Problem zu berücksichtigende Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit λ bedingt also einen zusätzlichen nichtlinearen Term in der parabolischen Differentialgleichung 2.Ordnung.

1.2 Wärmequelle bzw. -senke und Massenverlust

Die Wärmezufuhr von außen führt im Feststoff zu einer Temperaturerhöhung, durch die bei Holz und anderen Stoffen, auch solchen auf pflanzlicher Basis, Zersetzungsreaktionen hervorgerufen werden. Die dabei entstehenden gasförmigen Produkte diffundieren an die Oberfläche und führen zu einem Massenverlust des Stoffes. Der Massenverlust wird bei Feststoffen häufig als Reaktion 1. Ordnung beschrieben, wobei die temperaturabhängige Geschwindigkeitskonstante der Reaktion durch einen Arrhenius-Ausdruck wiedergegeben wird:

$$-\frac{dm}{dt} = (m - m_{\text{end}}(T)) \cdot v(T) \quad (\text{A.2})$$

und

$$v(T) = k \exp(-E/(R \cdot T)). \quad (\text{A.2a})$$

$m_{\text{end}}(T)$ ist dabei die Masse des Stoffes, die nach langer Zeit bei der Temperatur T noch übrig ist, d.h., wenn keine weitere Zersetzung mehr stattfindet. Bei Holz wäre m_{end} der Masse der Holzkohle gleichzusetzen. Wird wie im vorliegenden Fall angenommen, daß sich das Gesamtvolumen des Stoffes nicht ändert, dann ist Gleichung (A.2b) ein Sonderfall der Gleichung (A.2):

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = (\rho - \rho_{\text{end}}) \cdot v(T), \quad (\text{A.2b})$$

da bei Volumenkonstanz (mit $dV=0$)

$$dm = d(\rho V) = V d\rho. \quad (\text{A.2c})$$

Die bei der Zersetzungsreaktion auftretende Zersetzungswärme Q_z hat keinen konstanten Wert. Sie ist je nach Stoff und Temperatur endotherm, d.h. es wird zusätzlich Wärme benötigt und Q_z ist negativ (Wärmesenke) oder exotherm, d.h. es wird bei der Zersetzung z.B. durch oxidative Prozesse Wärme frei und Q_z ist

positiv (Wärmequelle). Die pro Zeiteinheit im Volumen freiwerdende bzw. erforderliche Wärmemenge W ist mit der Zersetzungswärme Q_Z durch die Beziehung (A.3) verknüpft:

$$W = \frac{dp}{dt} Q_Z \quad (\text{A.3})$$

1.3 Anfangs- und Randbedingungen

1.3.1 Anfangsbedingungen

Zur Berechnung der Brandausbreitung werden als Anfangsbedingungen die Temperatur und die Dichte als konstant angenommen.

1.3.2 Randbedingungen

Die folgenden Randbedingungen können bei dem vorliegenden Problem auftreten und sind je nach der Lage des Randes in Bezug auf die Zündquelle, d.h. der Zündquelle zu- oder abgekehrt, zu berücksichtigen.

1.3.2.1 Temperaturvorgabe ("RB 1.Art")

Bei der Randbedingung "Temperaturvorgabe" wird eine zeitabhängige Randtemperatur vorgegeben, z.B. ein linearer Temperaturanstieg mit festgelegter Anstiegsrampe. Diese Randbedingung entspräche in der Praxis einer temperaturgeregelten Heizplatte hoher Wärmeleitfähigkeit.

1.3.2.2 Vorgabe eines Wärmestromes ("RB 2.Art")

Diese Randbedingung besteht in der Angabe des Wärmestromes durch die Oberfläche als Funktion der Zeit bzw. des örtlichen Temperaturgradienten am Rand. Ein Sonderfall hiervon ist die adiabate Randbedingung, d.h. der Temperaturgradient dT/dx oder dT/dy ist Null, es findet also kein Wärmeaustausch über die Grenzfläche statt.

1.3.2.3 Vorgabe einer Wärmeübergangszahl α ("RB 3.Art")

Diese Randbedingung erhält man durch Angabe einer Außentemperatur und einer Wärmeübergangszahl α .

$$Q = F \alpha (T_{\infty} - T_w) \quad (A.4)$$

Die Gleichung (A.4) gibt den dabei übertragenen Wärmestrom an. Für den Brandfall bzw. den Modellfall der Brandentstehung und -ausbreitung kommt diese Art der Randbedingung in erster Linie in Betracht.

Bei heißen Rauchgasen als Zündquelle, bei denen Wärmestrahlung weitgehend vernachlässigt werden kann, tritt konvektive Wärmeübertragung auf. Bei Vorhandensein heißer Oberflächen in der Nähe des Brandgutes tritt überwiegend Wärmestrahlung auf und bei Flammen als Zündquelle eine Kombination aus Konvektion und Strahlung. Dabei wird die Wärmeübergangszahl bei Strahlung wie folgt bestimmt:

$$\alpha_{\text{Str}} = c_s \psi (T_{\infty}^4 - T_w^4) / (T_{\infty} - T_w) \quad (A.5)$$

Bei dem vorliegenden Problem wurde nur reine Konvektion als Wärmeübertragungsmechanismus berücksichtigt, da heiße Luft als Zündquelle vorgegeben wurde, bei der die Wärmeübertragung durch Wärmestrahlung vernachlässigt werden kann.

2. Diskretisierung der Differentialgleichung

In einfachen Fällen, bei denen die Stoffwerte in der Differentialgleichung (A.1) konstant sind und wo keine Wärmequellen (oder -senken) auftreten, kann die Fourier-Gleichung analytisch gelöst werden. Wenn keine analytische Lösung gefunden werden kann, dann muß die Differentialgleichung mit numerischen Methoden integriert werden. Hierzu bieten sich die Differenzenmethode

oder die Methode der finiten Elemente an. Im vorliegenden Fall wurde ein Rechenprogramm in FORTRAN zur Lösung der Differentialgleichung nach der Differenzenmethode erstellt.

2.1 Prinzip der Differenzenmethode

Das Gebiet, in dem die Differentialgleichung gelöst werden soll, wird mit einem Gitter überdeckt und die kontinuierliche Lösungsfunktion wird durch einen Polygonzug approximiert, dessen Stützstellen mit den Gitterpunkten zusammenfallen. Die Funktionswerte an den Gitterpunkten erhält man dadurch, daß man die Ableitungen in der Differentialgleichung durch Differenzenquotienten ersetzt, die mit den Funktionswerten gebildet werden, und die resultierende Differenzengleichung mit algebraischen Methoden löst. Dies wird im folgenden an der Differentialgleichung (A.1) dargestellt.

2.2 Überführung der Differentialquotienten in Differenzenform

Aus Gründen einer vereinfachten Darstellung wird die Schreibweise der Differentialgleichung (A.1) verändert, wobei die Differentialquotienten in Kurzform wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = T_t, \frac{\partial T}{\partial x} = T_x, \frac{\partial T}{\partial y} = T_y, \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = T_{xx}, \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = T_{yy}, \frac{d\lambda}{dT} = \lambda_T \quad (\text{A.6})$$

Mit Anwendung von (A.6) wird die Gleichung (A.1)

$$\lambda [T_{xx} + T_{yy}] + \lambda_T [T_x^2 + T_y^2] + \sigma \frac{\lambda}{Y} T_y + W = \rho c_p T_t \quad (\text{A.1a})$$

Die Wegkoordinaten x und y und die Zeit t werden in Abschnitte Δx , Δy und Δt zerlegt und die Differentialquotienten T_t , T_x , $T_y \dots$ in Differenzenschreibweise überführt mit i , j und n als Zählindices für die Position des Gitterpunktes in x , y - Richtung bzw.

zur Angabe der Zeitschicht:

$$T_t = \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} T_{i,j,n+1} - T_{i,j,n} + O(\Delta t) \quad (\text{A.7a})$$

$O(\Delta t)$ bedeutet dabei, daß der durch die Diskretisierung auftretende numerische Fehler von der Größe des Zeitschritts Δt bestimmt wird. Der Fehler nimmt mit kleinerem Δt also ab.

Die Wahl der Schrittweiten für x und y ist von der gewünschten numerischen Genauigkeit ebenfalls abhängig. Je feiner das Gitter ist, umso genauer ist die numerische (Näherungs-)Lösung. Ein feines Gitter ist aber nur dort erforderlich, wo steile Gradienten zu erwarten sind. Es empfiehlt sich daher in solchen Fällen, z.B. an der der Zündquelle zugekehrten Seite, ein feineres Gitter als entfernt davon zu wählen. Dies führt zu sogenannten nicht-äquidistanten Gittern. Eine Rechenvorschrift für ein nicht äquidistantes Gitter kann z.B. lauten (i_{\max} = Anzahl der Gitterpunkte in x -Richtung, j_{\max} = Anzahl der Gitterpunkte in y -Richtung):

$$x_1 = x_{\min}; \quad x_i = \left(\frac{i-1}{i_{\max}-1} \right)^m \quad x_{\max}; \quad x_{i_{\max}} = x_{\max} \quad (\text{A.8})$$

$$y_1 = y_{\min}; \quad y_j = \left(\frac{j-1}{j_{\max}-1} \right)^o \quad (y_{\max} - y_{\min}) + y_{\min}; \quad (\text{A.8a})$$

$$y_{j_{\max}} = y_{\max}$$

Wenn die Exponenten m und o gleich 1 sind, dann ist das Gitter äquidistant. Für m (bzw. o) kleiner als 1 nehmen die Gitterabstände zu x_{\max} (bzw. y_{\max}) hin zu, für m (bzw. o) größer als 1 nehmen die Gitterabstände zu x_{\max} (bzw. y_{\max}) hin ab.

Damit lauten die örtlichen Differenzenquotienten (Indizierung gemäß Bild A-1):

a) vordere Differenzenquotienten für T_x und T_y :

$$T_{x_i} = \frac{1}{h_i} (T_{i+1,j} - T_{i,j}) + O(h_i) \quad \text{und entsprechend}$$

$$T_{y_j} = \frac{1}{k_j} (T_{i,j+1} - T_{i,j}) + O(k_j) \quad (\text{A.7b})$$

b) hintere Differenzenquotienten für T_x und T_y :

$$T_{x_i} = \frac{1}{h_{i-1}} (T_{i,j} - T_{i-1,j}) + O(h_{i-1}) \quad \text{und entsprechend}$$

$$T_{y_j} = \frac{1}{k_{j-1}} (T_{i,j} - T_{i,j-1}) + O(k_{j-1}) \quad (\text{A.7c})$$

Einen geringeren numerischen Fehler und damit höhere Genauigkeit erhält man bei gleichen Schrittweiten:

c) mittlere Differenzenquotienten für T_x und T_y :

$$T_{x_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_i} (T_{i+1,j} - T_{i,j}) + \frac{1}{h_{i-1}} (T_{i,j} - T_{i-1,j}) \right) + O(h_i, h_{i-1})$$

und entsprechend

$$T_{y_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_j} (T_{i,j+1} - T_{i,j}) + \frac{1}{k_{j-1}} (T_{i,j} - T_{i,j-1}) \right) + O(k_j, k_{j-1}) \quad (\text{A.7d})$$

d) Entsprechend werden die Ableitungen T_{xx} und T_{yy} gebildet:

$$T_{xx} = \left(h_i \frac{1}{2} (h_i + h_{i-1}) \right)^{-1} (T_{i+1,j} - T_{i,j}) - \left(h_{i-1} \frac{1}{2} (h_i + h_{i-1}) \right)^{-1} (T_{i,j} - T_{i-1,j}) + O(h_i^2)$$

und entsprechend

$$T_{yy} = (k_j \frac{1}{2} (k_j + k_{j-1}))^{-1} (T_{i,j+1} - T_{i,j}) - (k_{j-1} \frac{1}{2} (k_j + k_{j-1}))^{-1} (T_{i,j} - T_{i,j-1}) + O(k_j^2) \quad (A.7e)$$

Wie man leicht sieht, geht für äquidistante Gitter, d.h. $h_i = h_{i-1}$ und $k_j = k_{j-1}$ Gleichung (A.7c) in die bekannte Form über

$$T_{xx} = \frac{1}{h^2} (T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}) \quad \text{und} \\ T_{yy} = \frac{1}{k^2} (T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}) \quad (A.7f)$$

In die Differentialgleichung (A.1a) werden die Näherungen für die Differentiale $T_t, T_y, T_{xx}, T_{yy}, T_x^2$ und T_y^2 gemäß den Bestimmungsgleichungen (A.7a-e) eingesetzt und man erhält einen Satz von $(i_{\max} \quad j_{\max})$ algebraischen Gleichungen zur Bestimmung der $T_{i,j}$. Diese Gleichungen haben die allgemeine Form

$$A_1 T_{i,j} + A_2 T_{i+1,j} + A_3 T_{i-1,j} + A_4 T_{i,j+1} + A_5 T_{i,j-1} + A_6 = 0 \quad (A.9)$$

2.3 Bestimmung des Massenverlustes

Der zeitliche Dichtegradient wird in Differenzenform überführt und aus der Bestimmungsgleichung (A.2b) berechnet:

$$\frac{d\rho_{i,j}}{dt} = \frac{1}{\Delta t} (\rho_{i,j,n+1} - \rho_{i,j,n}) = -(\rho_{i,j} - \rho_{\text{end}}) v(T) \quad (A.10)$$

Ersetzt man auf der rechten Seite der Gleichung

$$\rho_{i,j} = \frac{1}{2} (\rho_{i,j,n} + \rho_{i,j,n+1}) \triangleq \rho_{i,j,n+\frac{1}{2}} \quad (A.11)$$

und formt um, dann erhält man die Dichte $\rho_{i,j}$ zum Zeitpunkt $n+1$

$$\rho_{i,j,n+1} = (1 + \frac{1}{2} \Delta t v(T))^{-1} (\rho_{i,j,n} - \frac{1}{2} \Delta t v(T) \rho_{i,j,n} - \Delta t v(T) \rho_{\text{end}}) \quad (A.12)$$

Dies wiederum in die linke Seite der Gleichung (A.10) eingesetzt ergibt die Bestimmungsgleichung für die zeitliche Dichteänderung:

$$\frac{d\rho_{i,j}}{dt} = \frac{1}{\Delta t} (\rho_{i,j,n+1} - \rho_{i,j,n}) = \left(\frac{1}{v(T)} + \frac{1}{2} \Delta t \right)^{-1} (\rho_{\text{end}} - \rho_n), \quad (\text{A.13})$$

d.h. die Dichte an einem Gitterpunkt (i,j) kann in Kenntnis der Dichte an diesem Gitterpunkt (i,j) zur Zeit n und bei vorgegebener Reaktionsgeschwindigkeit v(T) für den Zeitpunkt n+1 bestimmt werden. Der Betrag der dabei pro Zeiteinheit benötigten Wärmemenge $W_{i,j}$ wird nach Gleichung (A.3) bestimmt.

2.4 Anfangs- und Randbedingungen

2.4.1 Anfangsbedingungen

Gemäß Abschnitt 1.3.1 des Anhangs werden zu Beginn der Rechnung

$$T_{i,j} = T_0 \quad \text{für alle } i,j \quad \text{und} \quad (\text{A.14})$$
$$\rho_{i,j} = \rho_0 \quad \text{für alle } i,j \quad \text{gesetzt.}$$

2.4.2 Randbedingungen

Die Randbedingungen gemäß Abschnitt 1.3.2 des Anhangs werden wie folgt berücksichtigt:

2.4.2.1 Randbedingung 1. Art

Der zeitliche Temperaturverlauf direkt am Rand ist bekannt, z.B. aus Messungen.

Beispiel: Linearer Temperaturanstieg am Rand $T_{i,1}$:

$$T_{i,1} = T_0 + t \quad r \quad (A.15)$$

2.4.2.2 Randbedingung 2.Art

Bei Vorgabe einer Wärmestromdichte \dot{q}_{zu} am Rand ergibt sich als Randbedingung, wenn der Temperaturgradient am Rand durch den hinteren Differenzenquotienten angenähert wird; z.B. für $T_{i,1}$:

$$T_{i,1} = T_{i,2} + \dot{q}_{zu} \frac{k_1}{\lambda} \quad (A.16)$$

Für den Sonderfall des adiabaten, d.h. ideal wärmeisolierten Randes mit $\dot{q}_{zu} = 0$ ist $T_{i,1} = T_{i,2}$.

2.4.2.3 Randbedingung 3.Art

Die Randbedingung 3.Art führt zu einer Bestimmungsgleichung für die Wandtemperatur, z.B. für $T_{i,1}$ (und entsprechend für die anderen Ränder $T_{i_{max},1}$, $T_{1,j}$ und $T_{1,j_{max}}$).

Da der Rand keine Wärme speichern kann und damit (diskretisiert)

$$\dot{q}_{zu} = -\lambda \frac{(T_{i,2} - T_{i,1})}{k_1} = \dot{q}_{ab} \quad (A.17)$$

gilt, und \dot{q}_{zu} gemäß Gleichung (A.4) definiert ist, wird

$$T_{i,1} = \left(\alpha - \frac{\lambda}{k_1} \right)^{-1} \left(\alpha T_\infty - \frac{\lambda}{k_1} T_{i,2} \right) \quad (A.18)$$

3. Lösungsverfahren

Wenn die $T_{i,j}$ -Werte der n-ten Zeitschicht bekannt sind und die Randbedingungen vorgegeben sind, dann können die $T_{i,j}$ -Werte der n+1-ten Zeitschicht durch Auflösen der aus der Differentialgleichung hergeleiteten Differenzgleichungen für $T_{i,j,n+1}$

(Gleichungssystem A.9) berechnet werden. Setzt man in der Gleichung (A.1a) die Differenzenquotienten (A.7d und A.7e) der n-ten Zeitschicht für die örtlichen Ableitungen und für T_t den bezüglich n vorderen Differenzenquotienten $T_t = (\Delta t)^{-1}(T_{i,j,n+1} - T_{i,j,n})$ ein, dann erhält man für jedes $T_{i,j}$ eine Gleichung, in der nur ein Wert $T_{i,j,n+1}$ der n+1-ten Zeitschicht vorkommt. Jede Gleichung kann also explizit gelöst werden. Setzt man jedoch in der Gleichung (A.1a) die Differenzenquotienten der n+1-ten Zeitschicht für die örtlichen Ableitungen T_{xx} , T_{yy} und T_y und für T_t den bezüglich n+1 hinteren Differenzenquotienten $T_t = (\Delta t)^{-1}(T_{i,j,n+1} - T_{i,j,n})$ ein, dann erhält man für jedes $T_{i,j}$ eine Gleichung, in der mehrere unbekannte Werte der n+1-ten Zeitschicht auftreten. Dabei werden für die quadratischen Korrekturglieder T_x^2 und T_y^2 jedoch die (bekannten) Werte der n-ten Zeitschicht eingesetzt, damit die Gleichung (A.9) linear bleibt. Die dadurch entstehende Ungenauigkeit ist im Rahmen der Fehler $O(\dots)$, die man ohnehin durch die Diskretisation macht.

Der Satz algebraischer Gleichungen, den man durch das zuletzt genannte Vorgehen erhält, stellt ein implizites System dar, das simultan gelöst werden muß. Ein explizites System scheint also an Einfachheit einem impliziten System überlegen zu sein. Man hat jedoch herausgefunden, daß für explizite Systeme scharfe Stabilitätsbedingungen gelten, die sehr kleine Δt -Schritte erfordern im Gegensatz zu impliziten Systemen, die grundsätzlich ein besseres Stabilitätsverhalten haben und daher mit weniger Zeitschritten auskommen. Aus diesem Grunde wurde einem impliziten Verfahren der Vorzug gegeben.

Besonders leicht läßt sich ein lineares Gleichungssystem lösen, wenn es die tridiagonale Form aufweist, z.B. (mit $i_{\max} = n$, T ein-dimensional)

$$\begin{aligned}
 b_1 T_1 + c_1 T_2 &= d_1 \\
 a_2 T_1 + b_2 T_2 + c_2 T_3 &= d_2 \\
 &\dots\dots\dots \\
 a_{n-1} T_{n-2} + b_{n-1} T_{n-1} + c_{n-1} T_n &= d_{n-1} \\
 a_n T_{n-1} + b_n T_n &= d_n \quad (A.19)
 \end{aligned}$$

Der Algorithmus zur Lösung der Koeffizientenmatrix ist einfach zu programmieren und kann dem Buch von Marsal /6/ entnommen werden. Wie man leicht sieht, stellt Gleichung (A.9) kein tridiagonales System dar, kann aber nach dem Verfahren von Peaceman und Rachford (siehe Marsal /6/) in ein Gleichungssystem überführt werden, das tridiagonale Merkmale aufweist. Das Vorgehen bei diesem Verfahren folgt dem Grundgedanken, daß die Lösung der Differenzgleichung für einen Zeitschritt so auf zwei Hälften dieses Zeitschrittes aufgeteilt wird, daß in jedem Halbschritt nur ein einfach zu behandelndes tridiagonales System zu lösen ist, wobei die $T_{i,j,n+\frac{1}{2}}$ -Werte, die man im ersten Halbschritt als Zwischenwerte erhält, für den zweiten Halbschritt als Anfangswerte verwendet werden und ein zweites tridiagonales System gelöst wird. Im Gegensatz zum "reinen" impliziten System können bei dem Verfahren von Peaceman und Rachford im Zwischenschritt Instabilitäten auftreten, die eine Begrenzung des Zeitschrittes (bei dem hier vorliegenden Problem ca. 4 Sekunden gegenüber ca. 0,1 Sekunde bei einem expliziten Verfahren) und eine Wahl der Gitterabstände $\Delta x \approx \Delta y$ erforderlich machen. Dies stellt dann eine Einschränkung dar, wenn die im vorhandenen Rechner bearbeitbare Zahl der Feldelemente einer Variablen begrenzt sind. So ist die Anzahl der Feldelemente, die während der Ausführung des Gesamtprogrammes "Rohrmodell" für die Temperaturwerte vereinbart werden kann, in der z.Zt. an der Forschungsstelle für Brandschutztechnik verfügbaren Rechnerausbaustufe auf 15×8 begrenzt, weshalb bei Abständen Δy von ca.

1 mm keine größeren Höhen des Rohrelementes als 3 bis 4 cm berechnet werden können. (In der Rechenpraxis bedeutet hier $\Delta x \approx \Delta y$, daß $\frac{1}{4} \Delta x \lesssim \Delta y \lesssim 4 \Delta x$ sein sollte)

Das Verfahren von Peaceman und Rachford führt im Falle der Gleichungen (A.1a) bzw.(A.9) zu folgenden Systemen:

$$a) \lambda T_{xx}^* + \lambda T_{yy} + \lambda T \left[T_x^2 + T_y^2 \right]_n + \sigma \frac{\lambda}{Y} T_Y + W = \rho c_p \frac{1}{2\Delta t} (T_{i,j}^* - T_{i,j,n})$$

$$b) \lambda T_{xx}^* + \lambda T_{yy} + \lambda T \left[T_x^2 + T_y^2 \right]_{n+\frac{1}{2}} + \sigma \frac{\lambda}{Y} T_Y \Big|_{n+\frac{1}{2}} + W = \rho c_p \frac{1}{2\Delta t} (T_{i,j,n+1} - T_{i,j}^*) \quad (A.20)$$

Als lineare algebraische Gleichungen ergeben sich daraus für das System a)

$$A_1 T_{i-1,j}^* + A_2 T_{i,j}^* + A_3 T_{i+1,j}^* = A_4 \quad (A.21)$$

also ein tridiagonales System für jedes j und $T_{i-1,j}^*$, $T_{i,j}^*$ und $T_{i+1,j}^*$ als den Zwischenwerten und entsprechend für das System b)

$$B_1 T_{i,j-1} + B_2 T_{i,j} + B_3 T_{i,j+1} = B_4, \quad (A.21a)$$

also ein tridiagonales System für jedes i, mit $T_{i,j-1}$, $T_{i,j}$ und $T_{i,j+1}$ als den Lösungen für die Zeit n+1. Die Skizze im Bild A-2 veranschaulicht diesen Vorgang zwischen den Zeitschritten n und n+1. Im Bild A-3 ist das Flußdiagramm des Wärmeleitungsprogrammes wiedergegeben.

4. BILDER

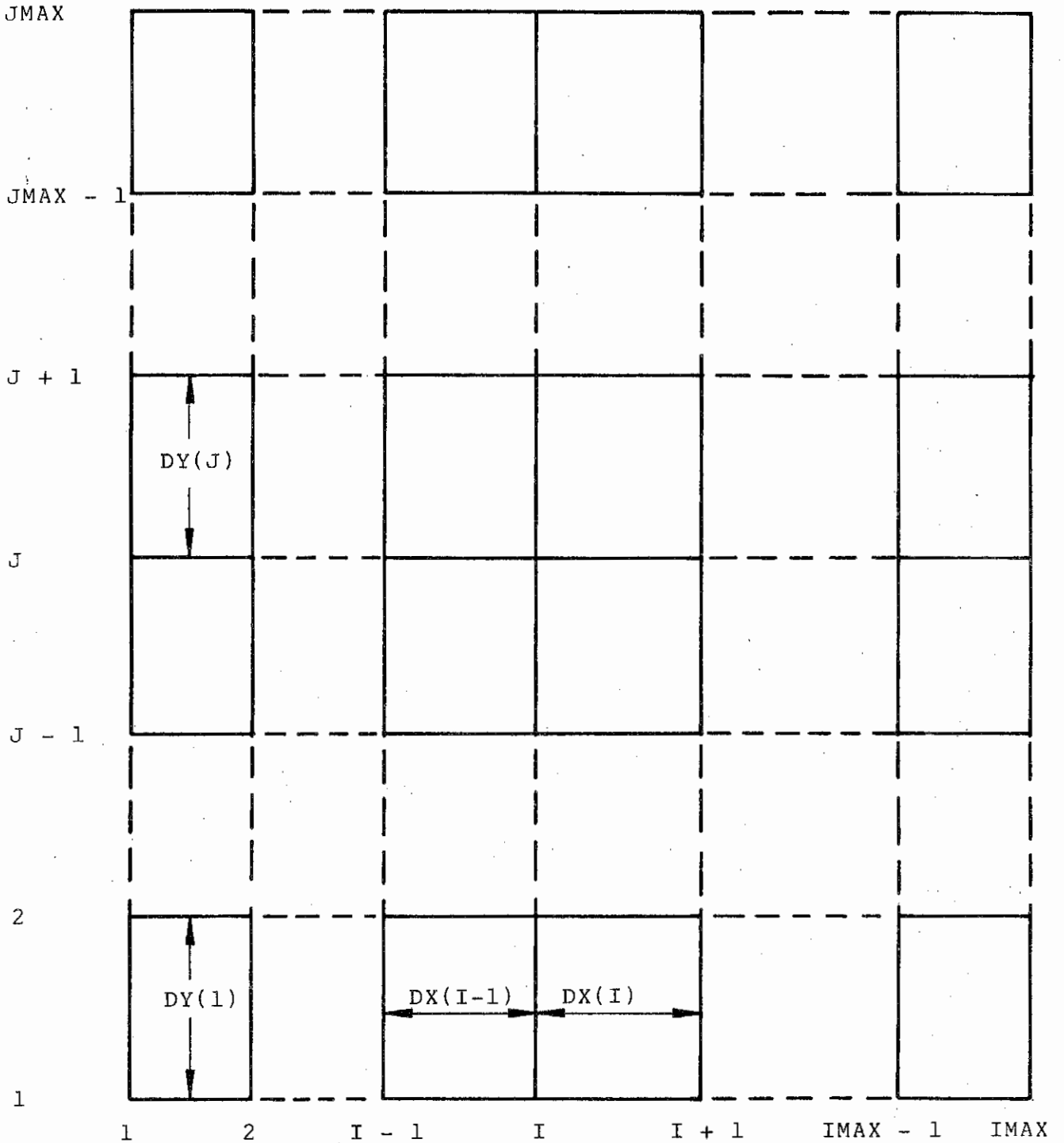


Bild A-1 Diskretisationsgitter mit nicht äquidistanten Stützstellen in x-Richtung und äquidistanten Stützstellen in y-Richtung. Indizierung der Gitterpunkte und Gitterabstände.

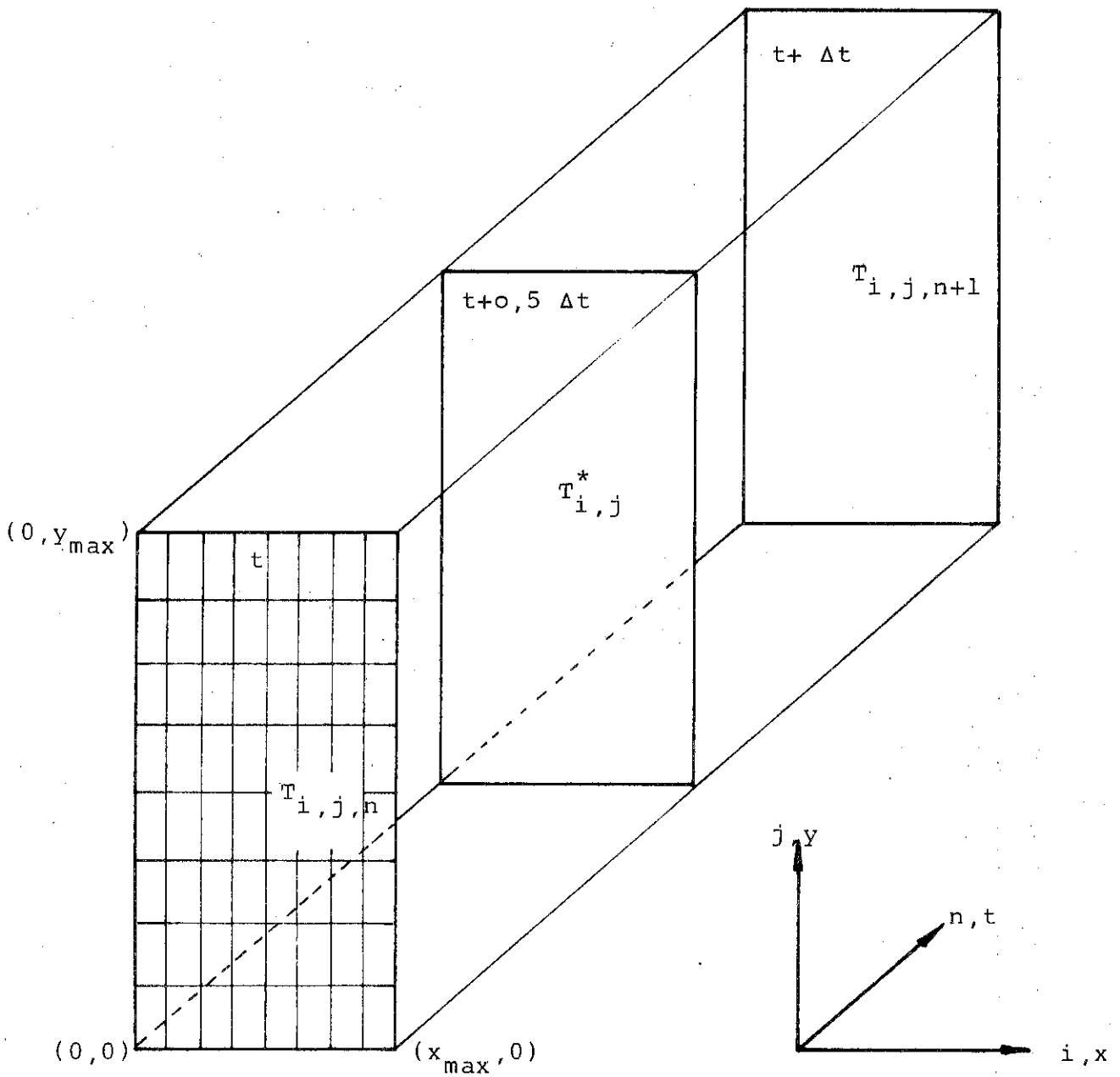


Bild A - 2 Skizze zum Ablauf des Rechenprogramms zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit dem Ansatz nach Peaceman und Rachford. (Alternierende Richtung für jeden Zeit- Halbschritt)

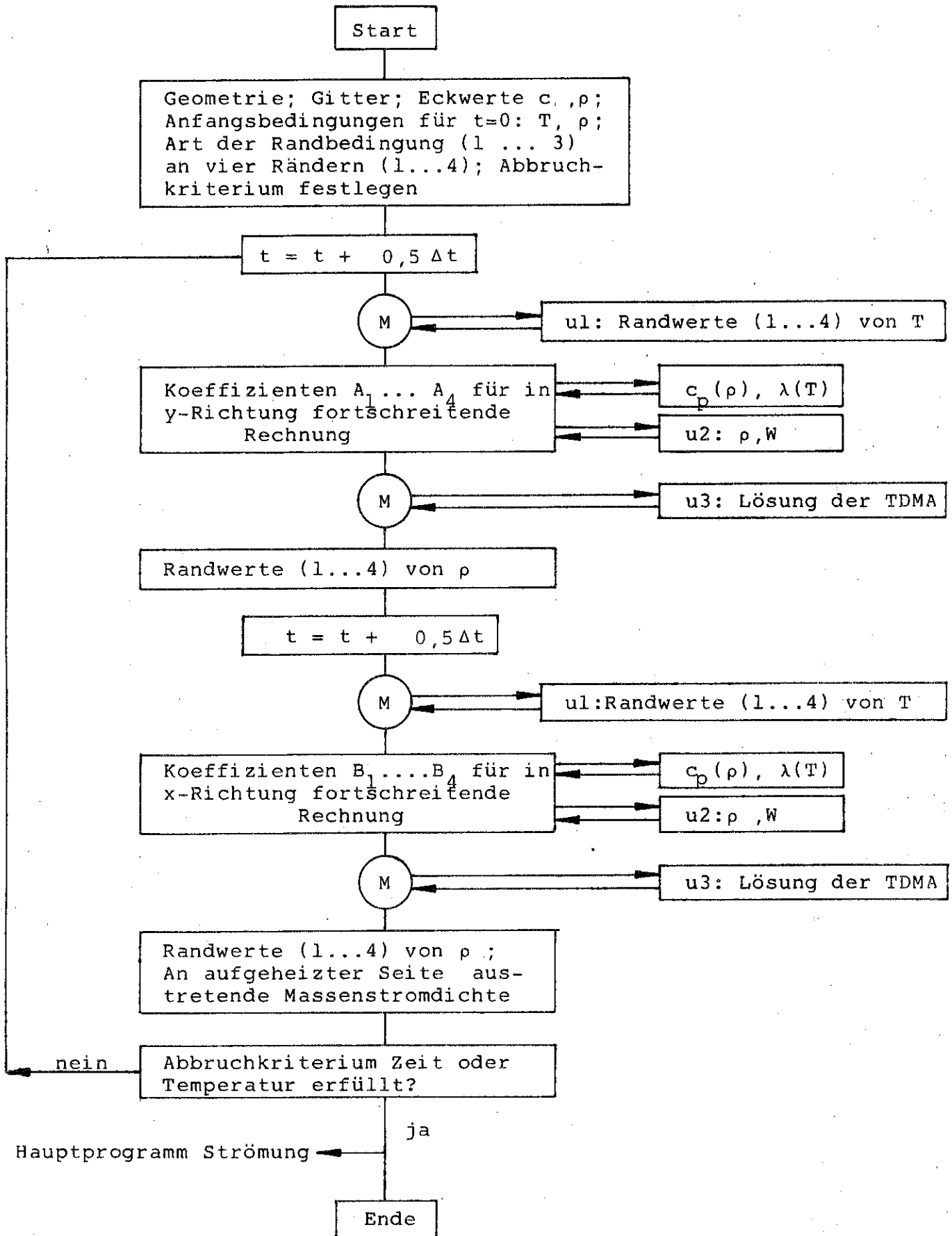


Bild A-3 Flußdiagramm des Wärmeleitprogramms (TDMA = Tridiagonale Matrix)